

Esercizi svolti dal Ferrauto:
Lezioni di trigonometria piana

Indice

901	2
1467	2
1473	5
1553	6

901

Risolviamolo con uno dei metodi standard.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\pi + x\right) + \cos x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi \cos x + \cos\frac{2}{3}\pi \operatorname{sen} x + x - \frac{1}{2} = 0$$

$$(\sqrt{3} + 2)\cos x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

Troviamo su apposite tabelle che $(\sqrt{3} + 2) = \operatorname{tg}(\pi/5)$.

$$\operatorname{tg}\frac{5}{12}\pi \cos x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen}\frac{5}{12}\pi \cos x - \operatorname{sen} x \cos\frac{5}{12}\pi - \cos\frac{5}{12}\pi = 0$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{5}{12}\pi - x\right) = \cos\frac{5}{12}\pi = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

$$\frac{5}{12}\pi - x = \begin{cases} \frac{\pi}{12} + 2\pi k \\ \pi - \frac{\pi}{12} + 2\pi k \end{cases}$$

$$-x = \begin{cases} -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$$

Cambiando il segno e ricordando che è inutile cambiare il segno a $2\pi k$, poiché ciò cambia solo il verso con cui “giriamo” sulla circonferenza da antiorario ad orario, troviamo il risultato.

1467

Discutiamo direttamente il caso generale, per ottenere il caso particolare basta porre $k = \sqrt{3}$.

Il triangolo AMC è equilatero per costruzione e dunque ha tutti gli angoli di sessanta gradi. Non solo: sappiamo anche che l'angolo che insiste sul diametro è retto

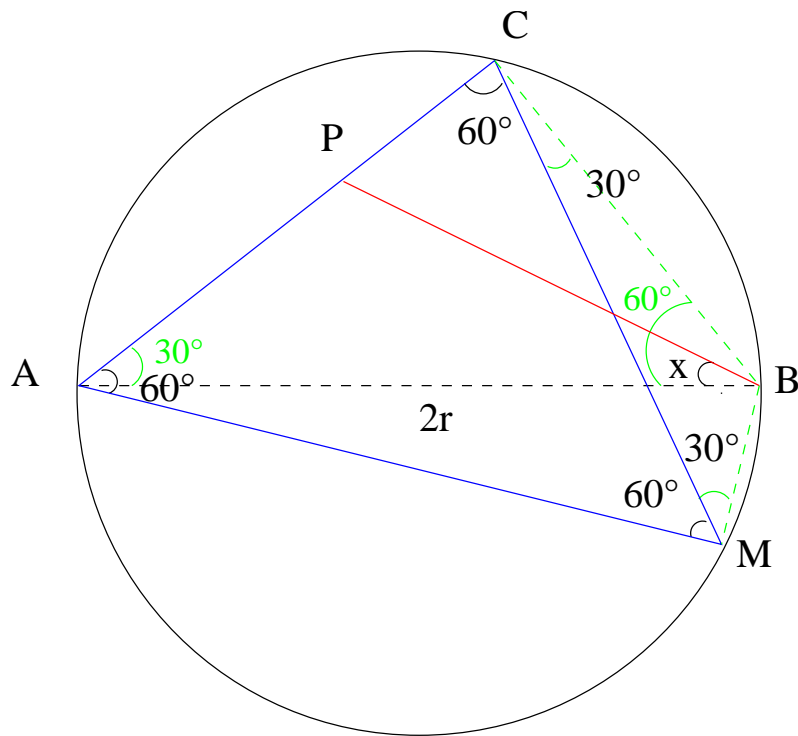


Figura 1: Problema 1467

e che l'angolo \widehat{MCB} deve essere di trenta gradi (o si sessanta, ma sceglia trenta per uniformarci a come lo abbiamo disegnato). Similmente l'angolo \widehat{BAM} è di trenta gradi (uno dei due angoli del triangolo rettangolo inferiore MAB), e quindi l'angolo \widehat{CAB} sarà anche esso di trenta.

I lati del triangolo equilatero sono dati dal teorema della corda: $AC = CM = MA = 2r \operatorname{sen}(\pi/3)$ dunque $CM = r\sqrt{3}$. Questo ci dice che l'angolo \widehat{CBM} , insistendo sulla stessa corda, è di 120 (il seno di 120 è uguale al seno di 60) gradi, cosa che potevamo pure vedere considerando che avevamo già posto gli altri due angoli del triangolo CBM a trenta gradi. Questo conferma la scelta di quale dei due angoli dei triangoli rettangoli ACB e AMB dovesse essere di trenta e quale di sessanta.

Naturalmente il disegno è **sbagliato**, ma quello che conta sono i valori assegnati agli angoli e ai lati, dedotti unicamente a partire dai dati del problema. Disegnare correttamente il triangolo equilatero e gli altri dati può dare comunque un aiuto.

Essendo il triangolo PCB rettangolo, avremo

$$CB = PB \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

da cui

$$PB = \frac{r}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$$

poiché infatti $\overline{CB} = 2r \sin(\widehat{CAB}) = r$. Similmente ricaviamo:

$$PC = PB \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{r \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$$

La richiesta del problema diventa dunque:

$$\frac{r}{\cos x'} + \frac{r \sin x'}{\cos x'} = kr$$

Se l'angolo x può andare da 0 (caso in cui $P \equiv A$) fino a $\pi/3$ (caso in cui $P \equiv C$), ne segue che l'angolo $x' = \pi/3 - x$ può andare da 0 (caso in cui $P \equiv C$) fino a $\pi/3$ (caso in cui $P \equiv A$). (I limiti dell'angolo sono imposti dal problema che ci dice che il punto P giace sul segmento \overline{AC})

Il problema che andiamo a risolvere è

$$\begin{cases} 1 + \sin x' = k \cos x' \\ 0 \leq x' \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Che possiamo porre come:

$$\begin{cases} 1 + y = kx \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Abbiamo un fascio di centro $(-2, -1)$, ricavato assegnando a k due numeri, per esempio prima $k = 0$ e poi $k = 1$ e facendo dunque l'intersezione tra le due rette risultanti.

Sulla circonferenza di raggio unitario dobbiamo considerare il punto $A(1, 0)$ e il punto $B(1/2, \sqrt{3}/2)$ e trovare per quali k le rette del fascio passano in tali punti. Nel primo caso (passaggio per A) abbiamo

$$1 + 0 = k$$

che ci dà $k = 1$. Nel secondo caso (passaggio per B) otteniamo:

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = k \frac{1}{2}$$

che ci dà $k = 2 + \sqrt{3}$.

Concludiamo dunque che c'è una soluzione per $1 \leq k \leq 2 + \sqrt{3}$, dove gli uguali sono da intendersi nei casi limite (quando la retta passa per A o per B).

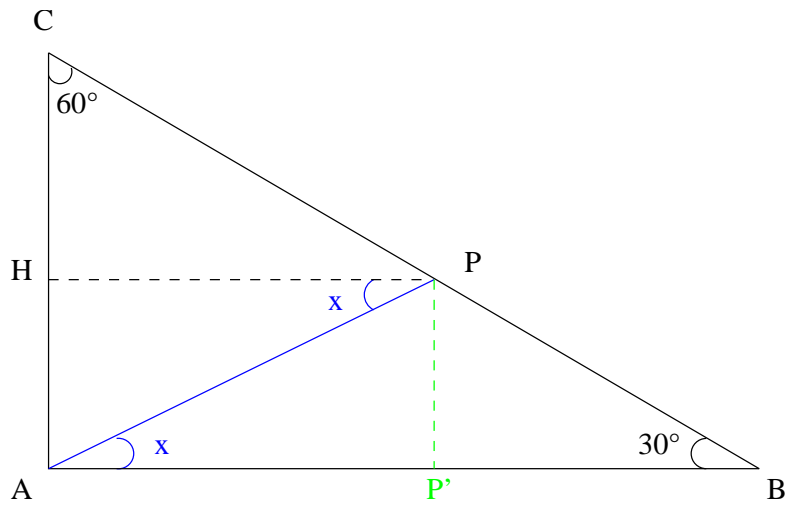


Figura 2: Problema 1473. I due angoli x sono uguali perché angoli alterni interni.

1473

Come al solito consideriamo direttamente il caso generale, quello particolare sarà dato quando $k = 2 + \sqrt{2}$.

Non lasciatevi spaventare dall'apparente mancanza di un dato: vedremo infatti che possiamo esprimere PB e PH in funzione di AP , che dunque potremo semplificare.

Usando i teoremi sui triangoli rettangoli: $PH = AP \cos x$, $PP' = AP \sin x$, ma nello stesso tempo $PP' = PB \sin(\pi/6)$ e dunque:

$$PH = AP \cos x$$

$$PB = \frac{AP \sin x}{\sin \frac{\pi}{6}}$$

La relazione imposta dal problema diventa:

$$\frac{AP + 2AP \sin x}{AP \cos x} = k$$

cioè

$$\frac{1 + 2 \sin x}{\cos x} = k \longrightarrow 1 + 2 \sin x = k \cos x$$

Ora notiamo che l'angolo x può andare da 0, caso in cui $P \equiv B$, fino a $\pi/2$, caso in cui $P \equiv C$. Ma notiamo che quando $P \equiv C$, PH diventa nullo e poiché questo compare al denominatore l'angolo x non potrà essere uguale all'angolo retto.

Il sistema goniometrico da discutere è quindi:

$$\begin{cases} 1 + 2 \operatorname{sen} x = k \cos x \\ 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Trovare le soluzioni di un tale sistema vuol dire cercare le intersezioni tra il fascio proprio di rette $1 + 2y = kx$ e la circonferenza unitaria.

Cerchiamo il centro del fascio trovando l'intersezione tra due rette a caso, per esempio quelle date da $k = 0$ (da cui si ottiene $y = -1/2$) e da $k = 1$ (retta $2y = x - 1$). Mettendola in intersezione si ottiene $x = 0$.

Imponiamo poi il passaggio per i punti sulla circonferenza determinati dagli angoli limite, ovvero $A(1,0)$ (quando $\alpha = 0$; ho rinominato l'angolo α per non fare confusione) e $B(0,1)$ quando $\alpha = \pi/2$ (che è un caso da scartare, come visto)

Otteniamo:

$$A \longrightarrow k = 1$$

Man mano che k cresce, la retta si avvicina sempre più alla retta coincidente con l'asse delle ordinate (ricordate che k qui rappresenta niente altro che il coefficiente angolare della retta).

Perciò abbiamo una sola soluzione per $k \geq 1$.

1553

In fig. 3 abbiamo l'impostazione grafica del problema; l'unico dato è $\overline{AB} = r\sqrt{3}$. Dal disegno stesso è evidente che i due angoli \widehat{ADB} e \widehat{ACB} sono uguali in quanto insistono sulla stessa corda, di lunghezza nota e quindi sono due angoli conoscibili.

Si vede facilmente che tutti gli angoli possono essere conosciuti: \widehat{DOA} è il terzo angolo di un triangolo di cui sappiamo già due angoli, c'è poi l'opposto al vertice, che è uguale e ricaviamo facilmente anche i due angoli in B , volendo si può considerare il fatto che noto un angolo al vertice in O , conosciamo tutti gli altri.

Considerando quanto detto e il teorema della corda otteniamo:

$$ADB = ACB = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$ABD = \frac{2}{3}\pi - 2x$$

$$ABC = \frac{2}{3}\pi - x$$

$$BD = 2r \operatorname{sen} 2x$$

$$AC = 2r \operatorname{sen} \left(\frac{2}{3}\pi - x \right)$$

$$BC = 2r \operatorname{sen} x$$

$$AD = 2r \operatorname{sen} \left(\frac{2}{3}\pi - 2x \right)$$

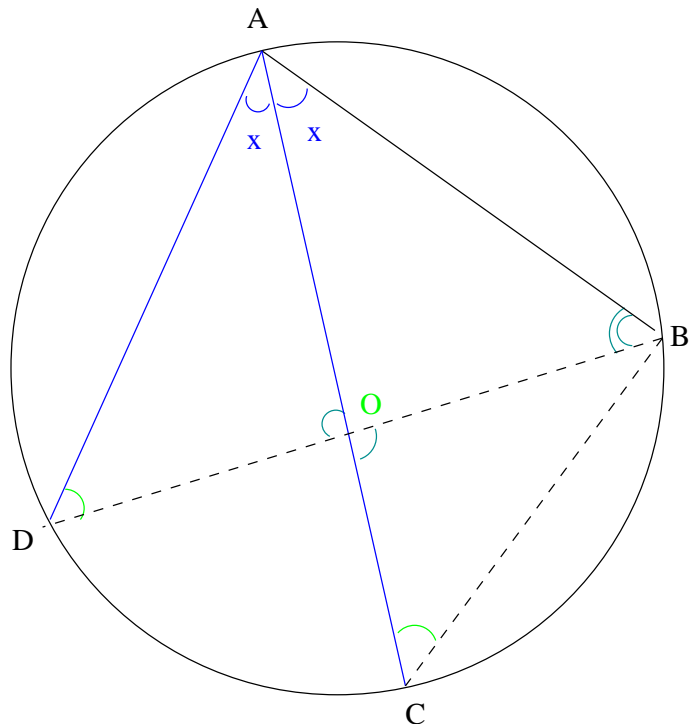


Figura 3: Problema 1553

Mettendo tutto dentro:

$$\frac{2r \operatorname{sen} 2x \cdot 2r \operatorname{sen} \left(\frac{2}{3}\pi - x\right)}{2r \operatorname{sen} x \cdot 2r \operatorname{sen} \left(\frac{2}{3}\pi - 2x\right)} = k$$

E procediamo dunque con semplici passaggi:

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} \left(\frac{2}{3}\pi - x\right)}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} \left(\frac{2}{3}\pi - 2x\right)} = \\ & = \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x [\operatorname{sen} \left(\frac{2}{3}\pi\right) \cos x - \cos \left(\frac{2}{3}\pi\right) \operatorname{sen} x]}{\operatorname{sen} x [\operatorname{sen} \left(\frac{2}{3}\pi\right) \cos 2x - \cos \left(\frac{2}{3}\pi\right) \operatorname{sen} 2x]} = k \end{aligned}$$

Ora sostituiamo i coseni e seni noti e moltiplichiamo per il denominatore. Dovremmo porre che l'espressione al denominatore non si annulli, cioè $\cos 2x - \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x \neq 0$. Considereremo questo in seguito, avendo il sistema da risolvere, compresa la limitazione dell'angolo.

$$2 \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} 2x = k \left[\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} 2x \right]$$

Possiamo riordinare per ottenere:

$$\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}(k+1)\sin 2x = k\frac{1}{2}\cos 2x$$

Piuttosto che usare le formule di duplicazione, conviene esprimere $\cos^2 x$ in funzione di $2x$. La derivazione della formuletta che ci consente di far ciò è semplice e la riportiamo esplicitamente:

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \\ &= 2\cos^2 x - 1 \longrightarrow \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}\end{aligned}$$

Dunque:

$$\frac{1}{2}(\cos 2x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(k+1)\sin 2x = k\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\sqrt{3}(k+1)\sin 2x + 1 = (k-1)\cos 2x \longrightarrow \sqrt{3}(k+1)y + 1 = (k-1)x$$

L'angolo \widehat{ADB} sarà sempre $\pi/3$ inquanto insiste sempre sullo stesso arco. Ne segue che man mano che il punto D si sposta verso A , l'angolo $2x$ cresce fino a un massimo di centoventi gradi (\widehat{ABD} va a 0 e la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre π), e dunque al massimo x sarà $\pi/3$. Tale valore è da scartare perché $AD \rightarrow 0$, cosa che farebbe divergere il denominatore.

Se invece D si allontana da A , fino a raggiungere B , in tale caso l'angolo $2x$ (e dunque x) varrà 0, e il segmento BC va a zero anch'esso, di conseguenza tale limite non sarà compreso. Riassumendo:

$$0 < 2\alpha < \frac{2\pi}{3}$$

Dati tali angoli, i punti da considerare sono $A(1,0)$ e $B(1/2, \sqrt{3}/2)$.

Non si perviene al risultato del Ferrauto! CONTROLLARE